Fedések és dimenzió provéges csoportokban

Maga Péter

Kivonat

Abért Miklós egy kérdését megválaszolva bebizonyítjuk, hogy ha egy végtelen provéges csoport egy kompakt részhalmazának box-dimenziója 1-nél kisebb, akkor kontinuumnál kevesebb eltoltja nem fedheti a csoportot. Megmutatjuk továbbá, hogy minden végtelen provéges csoportban létezik olyan kompakt részhalmaz, mely 0 Hausdorff-dimenziós, mégis konzisztens, hogy kontinuumnál kevesebb eltoltja fedi a csoportot.

1. Bevezető

A valós függvénytani kutatások egyik modern témája a következő kérdés vizsgálata. Igaz-e, hogy ha egy valós kompakt halmaz bizonyos értelemben kicsi, akkor a számegyenes csak kontinuum sok eltoltjával fedhető le?

A válasz természetesen függ attól, mit értünk „kis" halmaz alatt. U. B. Darji és Keleti Tamás [1] igazolták, hogy ha egy kompakt halmaz pakolási (vagy box-) dimenziója kisebb, mint 1, akkor kontinuumnál kevesebb eltoltja nem fedheti le a számegyenest.

Mi a helyzet, ha a halmaz nullmértékű? Ha a kontinuumhipotézis igaz, akkor csak kontinuum sok eltolt fedheti a számegyenest. Azonban Elekes Márton és J. Steprans [2] megmutatták, hogy létezik olyan kompakt halmaz, melyre konzisztens (a kiválasztási axiómával kiegészített Zermelo-Fraenkel-axiómarendszerrel), hogy kontinuumnál kevesebb eltoltja fed. Máthé András [3] megmutatta, hogy még 0 Hausdorff-dimenziójú halmaz is létezik, melynek konzisztensen kontinuumnál kevesebb eltoltja fed.

Elekes Márton és Tóth Árpád [4] az említett konzisztenciát (olyan kompakt halmaz létezése, mely nullmértékű a Haar-mérték szerint, de kontinuumnál kevesebb eltoltja fedi a teret) lengyel tér topológiájú Abel-csoportokra mutatták meg. A nemkommutatív esetet pedig visszavezették a provéges és a Lie-csoportok vizsgálatára.

Végtelen provéges csoportokra Abért Miklós [5] be is bizonyította a kérdéses konzisztenciát. Ugyanebben a cikkében vetette fel azt a kérdést, hogy vajon lehetne-e Darji és Keleti eredményéhez hasonlót bizonyítani végtelen provéges csoportokra és box-dimenzióra (ez a legfontosabb dimenziófogalom a provéges csoportok esetében).

A következőkben két — bizonyos szempontból ellentétes irányú — eredményt igazolunk.

Először belátjuk, hogy végtelen provéges csoportokban a box-dimenzió esetében fennáll a Darji és Keleti által a valós számegyenesen pakolási dimenzióra bizonyított tétel. Ennek során az [1]-ben található technikát dolgozzuk át provéges csoportokra.

A második lépésben bebizonyítjuk, hogy a Hausdorff-dimenzió esetében más a helyzet: minden végtelen provéges csoportban létezik olyan 0 Hausdorff-dimenziójú kompakt halmaz, melyre konzisztens a ZFC-vel, hogy kontinuumnál kevesebb eltoltja fedi a csoportot. Az ötlet a 0 Hausdorff-dimenzió elérésére Máthé Andrástól [3] származik, aki a valós esetben bizonyította az állítást.

Megjegyezzük, hogy bár a két dimenziófogalom eltér, zárt részcsoportok box- és Hausdorff-dimenziója megegyezik ([8]), így a második lépésben konstruált kompakt halmaz nem részcsoport.

Csak olyan provéges csoportokkal fogunk foglalkozni, amelyek végtelenek, mindezt az alábbi definíció biztosítja.

Definíció. *Legyenek adottak a $G_1, G_2, \dots$ véges csoportok, valamint a $\varphi_k : G_{k+1} \to G_k$ szürjektív, de nem injektív homomorfizmusok. Ekkor az ezek által meghatározott G provéges csoport elemei a következők:*

$$\{(g_1, g_2, \dots) | \forall k \in \mathbb{N} : g_k \in G_k, \varphi_k(g_{k+1}) = g_k\},$$

a műveletet pedig koordinátánként végezzük. Jelölés: egy tetszőleges $x \in G$ esetén $x_{|k}$ jelöli az x elem k. koordinátáját, $X \subseteq G$ esetén $X_{|k}$ jelöli azon elemek halmazát, melyek előállnak X-beli elemek k. koordinátájaként.

Megjegyezzük, hogy másképpen is definiálhatók a provéges csoportok. Általában például a véges csoportokat is provégesnek tekintik, amit mi úgy kaphatunk meg, ha megengedünk injektív homomorfizmusokat is.

A következő észrevétel nagy segítségünkre lesz. Ha a (G_n) csoportsorozatnak csak egy végtelen (G_{n_k}) részsorozatát tekintjük, melyek között a homomorfizmusokat az eredeti homomorfizmusok kompozíciójaként értelmezzük, akkor a belőlük származtatott provéges csoport az eredetivel izomorf lesz. Ennek az alkalmas részsorozatra való áttérésnek az adja a használhatóságát, hogy csoportelméleti tulajdonságokat nem változtat: például azt, hogy egy részhalmaz bizonyos eltoltjai fednek-e valamilyen más részhalmazt; míg más tulajdonságok igényeink szerint meg tudnak majd változni.

Mostantól a definíciókat illetően [8]-at követjük. Definiáljunk a természetes metrikát G-n:

Definíció. *Ha $x, y \in G$, és $x \neq y$, akkor legyen $d(x, y) = \frac{1}{|G_k|}$, ha $x_{|j} = y_{|j}$ minden $j < k$-ra, és $x_{|k} \neq y_{|k}$. Legyen továbbá $d(x, x) = 0$.*

Könnyű ellenőrizni, hogy d metrika G-n, amellyel G lengyel tér (teljes és szeparábilis). Bár ez a metrika megváltozik, amikor a csoportsorozatnak egy alkalmas részsorozatára térünk át, az általa indukált topológia nem.

2. Box-dimenzió

Jelölés. Legyen $|S|$ az S halmaz elemszáma.
Definíció. *Legyen $X \subseteq G$ tetszőleges. Ekkor legyenek*

$$\underline{\dim}_{\mathrm{B}}(X) = \liminf_{k\to\infty} \frac{\log|X_{|k}|}{\log|G_{|k}|}; \quad \overline{\dim}_{\mathrm{B}}(X) = \limsup_{k\to\infty} \frac{\log|X_{|k}|}{\log|G_{|k}|}$$

rendre X alsó és felső box-dimenziója. Ha $\underline{\dim}_{\mathrm{B}}(X) = \overline{\dim}_{\mathrm{B}}(X)$, akkor azt mondjuk, hogy $\dim_{\mathrm{B}}(X)$ létezik, és értéke $\underline{\dim}_{\mathrm{B}}(X) = \overline{\dim}_{\mathrm{B}}(X)$. Ebben a részben dimenzió alatt mindvégig box-dimenziót értünk.

Ha adott a G provéges csoport, akkor elkészíthetjük G^n direkt hatványát. Ennek részhalmazain hasonlóképpen értelmezhetjük az előbb definiált két fogalmat. A távolság legyen a koordinátánként vett távolságok maximuma. A dimenziók definíciójában azonban továbbra is $\log|G_{|k}|$ álljon a nevezőben. Ekkor például $\dim_{\mathrm{B}}(G^n) = n$.

Legyen $X, Y \subseteq G$. Könnyű belátni, hogy ekkor $\underline{\dim}_{\mathrm{B}}(X) + \underline{\dim}_{\mathrm{B}}(Y) \le \underline{\dim}_{\mathrm{B}}(X \times Y)$, $\overline{\dim}_{\mathrm{B}}(X) + \overline{\dim}_{\mathrm{B}}(Y) \ge \overline{\dim}_{\mathrm{B}}(X \times Y)$, azaz ha $\dim_{\mathrm{B}}(X), \dim_{\mathrm{B}}(Y)$ léteznek, akkor $\dim_{\mathrm{B}}(X) + \dim_{\mathrm{B}}(Y) = \dim_{\mathrm{B}}(X \times Y)$.

2.1. Lemma. *Ha $X \subseteq G$ belseje nemüres, akkor* $\dim_{\mathrm{B}}(X) = 1$. *Ha $X \subseteq G^n$ belseje nemüres, akkor* $\dim_{\mathrm{B}}(X) = n$.

Bizonyítás. Nyilván elegendő az egydimenziós változatot belátni. Legyen $x = (x_1, x_2, \ldots)$ belső pontja X-nek. Ekkor alkalmas k-ra $(x_1, \ldots, x_k, g_{k+1}, g_{k+2} \ldots) \in X$ minden $g_{k+1} \in G_{k+1}, g_{k+2} \in G_{k+2}, \ldots$ esetén. Ekkor minden $l \ge k$-ra $|X_{|l}| \ge \frac{|G_{|l}|}{|G_{|k}|}$. Mivel $|G_{|l}| \to \infty$, így $\frac{\log|X_{|l}|}{\log|G_{|l}|} \to 1$. $\square$

Ha $X \subseteq G$, akkor legyen

$$X_*^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in X^n | i \ne j \Rightarrow x_i \ne x_j\}.$$

Legyen $F_n : G^{n+1} \to G^n$ a következő:

$$F_n(x_1, \ldots, x_n, g) = (x_1 g, \ldots, x_n g).$$

Könnyű belátni, hogy $d(F_n(x), F_n(y)) \le d(x, y)$, így F folytonos. Szintén könnyen adódik, hogy nem növeli sem az alsó, sem a felső dimenziót, ugyanis semely szinten nem növeli az elemszámot: $|X_{|k}| \ge |F(X)_{|k}|$.

2.2. Lemma. *Legyen $X \subseteq G$ tetszőleges, melyre $F_n(X^n \times G) \cap P_*^n = \emptyset$. Ekkor minden $g \in G$-re $Xg \cap P$ legfeljebb $(n-1)$ elemű. Ha továbbá P kontinuum számosságú, akkor G nem fedhető le X kontinuumnál kevesebb jobb-eltoltjával (g-vel vett jobb-eltolt: Xg).*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az első állítás nem igaz, azaz $x_1 g = y_1, \ldots, x_n g = y_n$ P különböző elemei, ahol $x_1, \ldots, x_n \in X$. Ekkor $F_n(x_1, \ldots, x_n, g) \in P_*^n$, ami ellentmondás. A második állítás nyilvánvaló az elsőből. $\square$

2.3. Lemma. *Legyen $F \subseteq G^n$ kompakt, sehol sem sűrű. Ekkor van olyan $P \subseteq G$ kontinuum számosságú perfekt halmaz, melyre $F \cap P_*^n = \emptyset$.*

Bizonyítás. Legyen $U_0 = G$, ez nyílt. Általában az U_k halmaz álljon n^k nyílt komponensből. Az egyes szint komponenseiből úgy kapunk egy újabb szintet, hogy U_k minden komponensében n nyílt komponenst veszünk fel úgy, hogy minden komponens átmérője legfeljebb $\frac{1}{2^k}$, és lezártjuk is U_k-beli. Továbbá ha $V_1, \ldots, V_{n^{k+1}}$ ezek a komponensek, akkor ha $x_1, \ldots, x_n$ különböző V_j-kből vannak, akkor $(x_1, \ldots, x_n) \notin F$.

Először vegyük fel $V_1, \ldots, V_{n^{k+1}}$-et úgy, hogy páronként diszjunktak legyenek, az átmérőjük legyen legfeljebb $\frac{1}{2^k}$, még a lezártjuk is U_k-beli, valamint U_k minden komponensébe pontosan n essen közülük. Ezután zsugorítsuk őket, legyen π az $\{1, \ldots, n^{k+1}\}$ halmaz egy n elemű variációja, azaz egy $\{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n^{k+1}\}$ injektív függvény, és legyenek $V_1' \subseteq V_1, \ldots, V_{n^{k+1}}' \subseteq V_{n^{k+1}}$ olyanok, hogy $V_{\pi(1)}' \times \ldots \times V_{\pi(n)}' \cap F = \emptyset$ (ilyen van, mert F nem sűrű $V_{\pi(1)} \times \ldots \times V_{\pi(n)}$-ben). Ismételjük el ezt minden π variációra, megfelelő nyílt részét kapjuk U_k-nak, legyen ez U_{k+1}. Ez legyen a rekurziós lépés, és legyen $P = \cap_{k=0}^{\infty} U_k$. Könnyen adódik, hogy P megfelelő. □

2.4. Lemma. *Legyen $X \subseteq G$ kompakt, melyre $\overline{\dim}_B(X) < 1$. Ekkor G nem fedhető le X kontinuumnál kevesebb jobb-eltoltjával.*

Bizonyítás. Legyen $n \geq 2$ olyan, hogy $n\overline{\dim}_B(X) < n - 1$, ekkor $\overline{\dim}_B(X^n) \leq n\overline{\dim}_B(X) < n - 1$. Ekkor $X^n \times G \subseteq G^{n+1}$, és $\overline{\dim}_B(X^n \times G) < n$, azaz $\overline{\dim}_B(F_n(X^n \times G)) < n$. Így a 2.1 lemma szerint $F_n(X^n \times G) \subseteq G^n$ üres belsejű, kompakt halmaz, tehát sehol sem sűrű. Ekkor a 2.3 lemma szerint alkalmas $P \subseteq G$ kontinuum számosságú perfekt halmazra $F_n(X^n \times G) \cap P_*^n = \emptyset$. Így a 2.2 lemma szerint készen vagyunk. □

Ezt az állítást egy alkalmas csoportsorozatra való áttéréssel fel tudjuk úgy erősíteni, hogy alsó dimenzióra vonatkozzon:

1. Tétel. *Legyen $X \subseteq G$ kompakt, melyre $\underline{\dim}_B(X) < 1$. Ekkor G nem fedhető le X kontinuumnál kevesebb jobb-eltoltjával.*

Bizonyítás. A G csoportot definiáló G_n csoportokból kiválasztva egy részsorozatot, az ezek közötti homomorfizmusokat pedig a ritkítás előtti homomorfizmusok kompozíciójaként értelmezve egy $\widetilde{G}$ csoportot kapunk, mely izomorf G-vel. Ekkor ha adott az X halmaz, melyre $\underline{\dim}_B(X) < 1$, akkor legyen $\widetilde{G}$ olyan, hogy az abban értelmezett box-dimenzióra $\widetilde{\overline{\dim}_B}(\widetilde{X}) = \underline{\dim}_B(X) < 1$ fennálljon. Ekkor $\widetilde{X}$ kontinuumnál kevesebb eltoltja nem fedi $\widetilde{G}$-t, azaz X kontinuumnál kevesebb eltoltja nem fedi G-t. □

3. Hausdorff-dimenzió

Definíció. *Legyen $X \subseteq G$. Ekkor*

$$\mu_\delta^s(X) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (\operatorname{diam}(A_n))^s | \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \supseteq X, \operatorname{diam}(A_n) < \delta \right\},$$

$$\mu^s(X) = \lim_{\delta \to 0} \mu^s_\delta.$$

Továbbá

$$\dim_{\mathrm{H}}(X) = \sup\{t | \mu^t(X) = \infty\} (= \inf\{t | \mu^t(X) = 0\})$$

X Hausdorff-dimenziója. Ebben a részben dimenzió alatt mindvégig Hausdorff-dimenziót értünk.

A következő tételt bizonyítjuk be.

2. Tétel. *Ha G provéges csoport, akkor ZFC-vel konzisztens, hogy van olyan 0 Hausdorff-dimenziójú kompakt részhalmaza, melynek kontinuumnál kevesebb jobb-eltoltja fedi G-t.*

Jelölés. Legyen $N_j \triangleleft G$ a következő normálosztó: azon elemek halmaza, melyeknek első j koordinátája 1 (egységelem).

3.1. Lemma. *Legyenek n, k pozitív egészek. Ekkor van olyan $K_{n,k} \subseteq G$ kompakt halmaz, mely zárt F_i halmazok uniója, $\sum_i \mathrm{diam}(F_i)^{\frac{1}{k}} < \frac{1}{k}$, és tetszőleges $x_1, \ldots, x_n \in G$ elemekre van olyan $g \in G$, melyre $x_1 g, \ldots, x_n g \in K_{n,k}$. Továbbá $K_{n,k}$ még olyannak is választható, hogy valamely N_j normálosztó szerinti teljes mellékosztályok uniója legyen.*

Bizonyítás. Az állítás $n = 1$-re nyilvánvaló, legyen ugyanis $K_{1,k} = N_j$ egy kellően kicsi normálosztója G-nek. A továbbiakban rekurzióval készítjük el a megfelelő $K_{n,k}$ halmazokat.

Hogyan lép a rekurzió $n-1$-ről n-re? Egy rögzített k-hoz vegyük fel azt a rendszert, mely a feltételeket $n-1$-re kielégíti (legyen ez $K_{n-1,k}$), ehhez még teszünk részhalmazokat, így állítjuk elő $K_{n,k}$-t. Tegyük fel, hogy az $n-1$-re adott konstrukció olyan, hogy áll egy N_j normálosztóból, illetve néhány mellékosztályából, és hogy valamely F_i zártakra $K_{n-1,k} = \cup_i F_i$, valamint

$$\sum_i \mathrm{diam}(F_i)^{\frac{1}{k}} < \frac{1}{k} - \varepsilon.$$

Minden N_j szerinti, N_j-től különböző mellékosztályban egy-egy elemet kijelölünk: $h_1, \ldots, h_m$, majd köréjük azonos méretű $B_1, \ldots, B_m$ zárt gömböket veszünk úgy, hogy fennálljon

$$\sum_{i=1}^{m} \mathrm{diam}(B_i)^{\frac{1}{k}} < \varepsilon.$$

Továbbá $B_1, \ldots, B_m$ úgy is megválaszthatók, hogy valamilyen $j' > j$-re $N_{j'}$ szerinti mellékosztályok legyenek. Ekkor $K_{n,k} = \cup_i B_i \cup K_{n-1,k}$ jó. Egyrészt

$$\sum_i \mathrm{diam}(F_i)^{\frac{1}{k}} + \sum_{i=1}^{m} \mathrm{diam}(B_i)^{\frac{1}{k}} < \frac{1}{k}.$$

Másrészt legyenek $x_1, \ldots, x_n$ tetszőleges elemek. Az $x_1, \ldots, x_{n-1}$-hez adódik egy g, melyre $x_1 g, \ldots, x_{n-1} g \in K_{n-1,k}$. Ekkor $x_n g$ valamely N_j szerinti mellékosztályban van, azaz alkalmas $g' \in N_j$-re $x_n g g' = h_i \in B_i$. Továbbá a g'-vel való jobb-szorzás az N_j szerinti mellékosztályok mindegyikét önmagára képezi, így gg' megfelelő elem: $x_1gg', \ldots, x_ngg' \in K_{n,k}$. Valamint $K_{n,k}$ újra olyan szerkezetű, amilyet a rekurzióban igértünk. □

Megjegyzés. A feltételeknek megfelelő $K_{n,k}$ halmazt el tudjuk készíteni egy tetszőleges N_j szerinti H mellékosztályon belül is úgy, hogy az olyan F_i zárt halmazokból áll, melyekre

$$\sum_i \mathrm{diam}(F_i)^{\frac{1}{k}} < \frac{1}{k}$$

fennáll, és tetszőleges $x_1, \ldots, x_n \in H$ elemekre legyen olyan $g \in N_j$, melyre $x_1g, \ldots, x_ng \in K_{n,k}$. A konstrukció ugyanúgy történik, mint a $H = G$ esetben, $K_{n,k}$ ekkor is egy normálosztó szerinti teljes mellékosztályok uniója. Közvetlen visszavezetés: készítsük el a teljes csoportban $K_{n,k}$-t, és minden N_j szerinti mellékosztályba eső részét toljuk jobb-eltolással H-ba: $H_1h_1 = \ldots = H_mh_m = H$. A kapott $K^H_{n,k}$ halmazra a $\sum \mathrm{diam}(.)^{\frac{1}{k}} < \frac{1}{k}$ nyilván fennáll, és ha adottak $x_1, \ldots, x_n \in H$, akkor alkalmas $g \in G$-re és H_i-re $x_1g, \ldots, x_ng \in K_{n,k} \cap H_i$. Ekkor $x_1gh_i, \ldots, x_ngh_i \in K^H_{n,k} \cap H$. Az, hogy ekkor $gh_i \in N_j$ fennáll, nyilvánvaló.

Definíció. *Legyen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Ekkor a $\prod_{n=1}^{\infty} A_n$-t f-szlalomnak nevezzük, ha minden A_n elemszáma legfeljebb $f(n)$. Legyen adott f és egy $\prod_{n=1}^{\infty} A_n$ f-szlalom. Azt mondjuk, hogy $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ egy részszlalom-méret, ha minden n-re $g(n) \leq f(n)$. Ekkor $\prod_{n=1}^{\infty} B_n$ g-részszlalom, ha g-szlalom, és minden n-re $B_n \subseteq A_n$.*

Legyenek $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, ahol $g(i) < f(i)$. Tegyük fel, hogy $f(i)$ és $g(i)$ tart a végtelenbe. Ekkor konzisztens a ZFC-vel az, hogy minden f-szlalomot kontinuumnál kevesebb g-részszlalom fed ([2] 9-10. oldal, [6] 2.10. Tétel, [7] 2.3.9. Tétel és 388. oldal).

Tervünk a következő. Meghatározunk egy f-szlalomot, mely éppen G-nek felel meg, valamint egy $g(1), g(2), \ldots$ részszlalom-méretet. Az előbb konstruált $K_{n,k}$ halmazok segítségével készítünk egy olyan 0 dimenziós C kompakt halmazt G-ben, amelyre igaz, hogy minden g-szlalomot C egy alkalmas jobb-eltoltjával fedhetünk. Ekkor G konzisztensen előáll, mint kontinuumnál kevesebb megengedett részszlalom uniója, amit be tudunk fedni C kontinuumnál kevesebb jobb-eltoltjával.

Konstrukció.

Vegyük fel a $\widetilde{K}_{1,1} = K_{1,1}$ halmazt a 3.1 lemma szerint, tegyük fel, hogy ez egyetlen N_j szerinti mellékosztályból áll.

Ezek után tegyük fel, hogy az m. szinten vagyunk, és az előző szinten kijelölt $\widetilde{K}_{(m-1)!,(m-1)!}$ halmaz néhány teljes, azonos méretű mellékosztályból áll. Legyen ezek közül az egyik H. Ekkor H alkalmas bal-eltoltjai $\widetilde{K}_{(m-1)!,(m-1)!}$ mellékosztályai, legyenek ezek $H = H_1, \ldots, H_{S(m-1)}$. Így alkalmas $1 = h_1, \ldots, h_{S(m-1)}$ elemekre $H = h_1H_1 = \ldots = h_{S(m-1)}H_{S(m-1)}$. Ezután vegyük fel H-ban a 3.1 lemma utáni megjegyzés szerint létező $K^H_{m!,m!S(m-1)}$-t, majd ennek $S(m-1)$ darab h_i^{-1} visszatoltját, azaz a

$$h_i^{-1}K^H_{m!,m!S(m-1)} \subseteq H_i$$

halmazt $1 \leq i \leq S(m-1)$-re. Legyen

$$\widetilde{K}_{m!,m!} = \bigcup_{i=1}^{S(m-1)} h_i^{-1} K^H_{m!,m!S(m-1)}.$$

Ezt a rekurziós lépést ismételjük el minden m-re.

Ekkor $\widetilde{K}_{m!,m!}$ kompakt halmazok monoton fogyó sorozata, legyen

$$C = \cap_{m=1}^{\infty} \widetilde{K}_{m!,m!}.$$

3.2. Lemma. *A konstruált C halmazra* $\dim_{\mathrm{H}}(C) = 0$.

Bizonyítás. Mivel H-n belül $K^H_{m!,m!S(m-1)}$ egy zártakból álló F_i fedésére

$$\sum_i \operatorname{diam}(F_i)^{\frac{1}{m!S(m-1)}} < \frac{1}{m!S(m-1)},$$

így ennek $S(m-1)$ példányára ($h_1^{-1}, \ldots, h_{S(m-1)}^{-1}$ alkalmazása után):

$$\sum_i \operatorname{diam}(F_i)^{\frac{1}{m!S(m-1)}} < \frac{1}{m!}.$$

Ezután ha a kitevőt növeljük ($\operatorname{diam}(G) \leq 1$), akkor

$$\sum_i \operatorname{diam}(F_i)^{\frac{1}{m!}} < \frac{1}{m!},$$

ami bizonyítja a 0 dimenziót. □

A G-nek megfelelő szlalom meghatározása.

Most — akárcsak az 1. Tétel bizonyításában — tekintsük a a G-t meghatározó csoportsorozat egy részsorozatát úgy, hogy a $\widetilde{K}_{m!,m!}$-t alkotó mellékosztályok az (új) N_m normálosztóhoz tartozzanak. Az ezt kielégítő részsorozatot még sokféleképp kiválaszthatjuk, hiszen ha $\widetilde{K}_{m!,m!}$ teljes N_j szerinti mellékosztályok uniója, akkor teljes $N_{j'}$ szerinti mellékosztályok uniója is minden $j' > j$-re: ügyeljünk még arra is, hogy $|G_m/G_{m-1}| > m$ fennálljon (ahol G_0 alatt a triviális csoportot értjük). Innentől G-nek ebben abban az új előállításában dolgozunk, amit az N_m normálosztók határoznak meg, legyen $f(m) = |G_m/G_{m-1}|$. Legyen továbbá $g(m) = m$, és legyen az f-szlalom: $\prod_{m=1}^{\infty} G_m/G_{m-1}$. Ez valóban f-szlalom, és valóban a G csoportnak felel meg. Ugyanis képzeljük el G-t mint egy fát, mely az $(m-1)$.-ről az m. szintre lépve minden eleméből annyi részre ágazik, amekkora a $\varphi_{m-1} : G_m \to G_{m-1}$ homomorfizmus magja.

3.3. Lemma. *Tegyük fel, hogy adott a G-nek megfelelő szlalom egy g-részszlalomja, legyen ez Z. Ez $C = \cap_{m=1}^{\infty} \widetilde{K}_{m!,m!}$-ba tolható alkalmas jobb-eltolással.*

Bizonyítás. A bizonyítás során a konstrukció jelöléseit használjuk, melyekre röviden emlékeztetünk: $\widetilde{K}_{(m-1)!,(m-1)!}$ álljon a $H = H_1, \ldots, H_{S(m-1)}$ mellékosztályokból (a csoportok részsorozatára való áttérés után ezek N_{m-1} szerinti mellékosztályok), és legyenek $1 = h_1, \ldots, h_{S(m-1)}$ olyan elemek, melyekre $H = h_1 H_1 = \ldots = h_{S(m-1)} H_{S(m-1)}$.

Először azt mutatjuk meg teljes indukcióval, hogy minden m-re van olyan $y \in G$, amelyre $(Zy)_{|m} \subseteq (\widetilde{K}_{m!,m!})_{|m}$. Ez $m = 1$-re világos ($Z_{|1}$ egyelemű, $\widetilde{K}_{1!,1!}$ nemüres). Ha $m-1$-re igaz, akkor m-re a következőt tesszük. Tudjuk, hogy minden i-re $Z_{|i}$ legfeljebb $i!$ elemű. Az indukciós feltevés szerint $Z_{|m-1}$ $(\widetilde{K}_{(m-1)!,(m-1)!})_{|m-1}$-be tolható, legyen ez a jobb-eltolt $(Zx)_{|m-1}$, azaz $(Zx)_{|m-1} \subseteq (H_1)_{|m-1} \cup \ldots \cup (H_{S(m-1)})_{|m-1}$. Mivel a $H_1, \ldots, H_{S(m-1)}$ mellékosztályok N_{m-1} szerintiek, ezért ha egy részhalmazt G_{m-1}-re megszorítva tartalmaznak, akkor G-ben is, így $(Zx)_{|m} \subseteq (H_1)_{|m} \cup \ldots \cup (H_{S(m-1)})_{|m}$. Minden $b \in Z$-re vegyük $(bx)_{|m} \in (Zx)_{|m}$ helyett a $H_{|m}$ mellékosztályba eső bal-eltoltját: ha valamelyik $(bx)_{|m}$ elem a $(H_i)_{|m}$ mellékosztályba esik, akkor helyette $(h_i bx)_{|m}$-et. Hány elemet kapunk így $H_{|m}$-ben? A $(bx)_{|m}$ alakú elemek száma legfeljebb $m!$, mivel Z g-szlalom. Ezen $(bx)_{|m}$ elemek mindegyikét eltoltuk valamelyik h_i-vel, így $H_{|m}$-ben összesen legfeljebb $m!$ darab $(h_i bx)_{|m}$ alakú elem keletkezett. Ezeket pedig $(K^H_{m!,m!S(m-1)})_{|m}$-be tudjuk tolni egy $h \in G$ elemmel: a $(h_i bx)_{|m}$ alakú elemek mindegyikét tetszőlegesen kifolytatva egy-egy G-beli elemmé azok egyszerre $K^H_{m!,m!S(m-1)}$-ba tolhatók annak definíciója szerint. Ekkor a $(h_i^{-1} K^H_{m!,m!S(m-1)})_{|m}$ alakú halmazokban is megfelelő helyre kerül $(Zx)_{|m}$ minden $(bx)_{|m}$ eleme: $(bxh)_{|m} = (h_i^{-1} h_i bxh)_{|m}$, itt $(h_i bxh)_{|m} \in (K^H_{m!,m!S(m-1)})_{|m}$, azaz

$$(bxh)_{|m} = (h_i^{-1} h_i bxh)_{|m} \in (h_i^{-1} K^H_{m!,m!S(m-1)})_{|m} \subseteq (\widetilde{K}_{m!,m!})_{|m}.$$

Tehát összességében xh olyan elem, amelyre $(bxh)_{|m} \in (\widetilde{K}_{m!,m!})_{|m}$ minden $b \in Z$-re.

Tekintsük minden m-re azt az $y_m \in G$ elemet, amelyre $(Zy_m)_{|m} \subseteq (\widetilde{K}_{m!,m!})_{|m}$. Ekkor G kompaktsága miatt (y_m)-nek van konvergens részsorozata, legyen ennek limesze $\overline{y}$. Állítjuk, hogy $Z\overline{y} \subseteq C$. Tegyük fel indirekte, hogy Z valamely b elemére $b\overline{y} \notin C$. Legyen $d'(b\overline{y}, C) = D > 0$, ahol d' a csoportok részsorozatára való áttérés után adódó metrika. Ha $m > m_0$, akkor $d'(by_m, b\overline{y}) < D/2$. Valamint ha $m > m_1$, akkor $\widetilde{K}_{m!,m!} \subseteq U_{D/2}(C)$, ahol $U_\varepsilon(C) = \{x \in G | d'(x, C) < \varepsilon\}$. Mivel $(by_m)_{|m} \in (\widetilde{K}_{m!,m!})_{|m}$, ezért $by_m \in \widetilde{K}_{m!,m!}$ (mivel $\widetilde{K}_{m!,m!}$ teljes N_m szerinti mellékosztályok uniója, ezért ha egy elemet G_m-re megszorítva tartalmaz, akkor G-ben is tartalmaz), így $d'(by_m, C) < D/2$. Ekkor $m > m_0, m_1$ esetén

$$d'(b\overline{y}, C) \leq d'(by_m, b\overline{y}) + d'(by_m, C) < D,$$

ami ellentmondás. □

Ezen lemmák együttesen implikálják a tételt: a 3.2 lemma szerint C nulldimenziós, a 3.3 lemma szerint pedig minden g-szlalom lefedhető egy jobb-eltoltjával. Ekkor mivel ZFC-vel konzisztensen kontinuumnál kevesebb g-szlalom fedi a G csoportot, konzisztensen C-nek kontinuumnál kevesebb eltoltja fedi G-t. □

Hivatkozások

[1] U. B. Darji, Keleti Tamás: *Covering the real line with translates of a compact set*, Proc. Amer. Math. Soc. **131** (2003)

[2] Elekes Márton, J. Steprans: *Less than 2^ω many translates of a compact nullset may cover the real line*, Fund. Math. **181** (2004), No. 1., 89-96.

[3] Máthé András, *Covering the real line with translates of a zero dimensional compact set*, preprint

[4] Elekes Márton, Tóth Árpád: *Covering locally compact groups by less than continuum many translates of a compact nullset*, Fund. Math. **193** (2007), 243-257.

[5] Abért Miklós: *Less than continuum many translates of a compact nullset may cover any infinite profinite groups*, Journal of Group Theory **11** (2008), No 4., 545-553.

[6] G. Gruenhage, R. Levy: *Covering $^\omega\omega$ by special Cantor sets*, Comment, Math. Univ. Carolin. **43** (2002), No. 3., 497-509.

[7] T. Bartosynski, H. Judah: *Set Theory: On the Structure of the Real Line*, A. K. Peters, Wellesley, Massachusetts, 1995.

[8] Y. Barnea, A. Shalev: *Hausdorff Dimension, Pro-p Groups and Kac-Moody Algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. **349** (1997), No. 12., 5073-5091.